Tema 7

Máximos y mínimos

7.1 Extremos absolutos, extremos relativos.

Definición 7.1 *Sea* $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función de dos variables:*

a) *Se dice que* $f(x, y)$ *tiene un* ***máximo absoluto*** *en el punto* A *si* $f(A) \geq f(B)$ $\forall B \in D$.

b) *Se dice que* $f(x, y)$ *tiene un* ***mínimo absoluto*** *en el punto* A *si* $f(A) \leq f(B)$ $\forall B \in D$.

c) *Se dice que* $f(x, y)$ *tiene un* ***máximo relativo*** *en el punto* A *si* $f(A) \geq f(B)$, *para todo punto* B *perteneciente a un cierto entorno abierto de* A.

d) *Se dice* $f(x, y)$ *tiene un* ***mínimo relativo*** *en el punto* A *si* $f(A) \leq f(B)$, *para todo punto* B *perteneciente a un cierto entorno abierto de* A.

Definición 7.2 *Sea* $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función de dos variables definida en una entorno abierto que contiene a un punto* $A(a, b)$. *Se dice que el punto* A *es* **punto crítico** *si satisface una de las dos condiciones siguientes:*

a) $f_x(a, b) = 0$ *y* $f_y(a, b) = 0$ (*esto equivale a* $\overrightarrow{\nabla f}(A) = \vec{0}$)

b) $f_x(a, b)$ *o* $f_y(a, b)$ *no existen.*

A los puntos críticos que no son ni máximos ni mínimos relativos se les dice **puntos de silla**.

Teorema 7.3 (Condición necesaria de extremo) *Si* $f(x,y)$ *tiene un extremo relativo en un entorno abierto de un punto* A, *entonces* A *es un punto crítico de* f.

Demostración.

Supongamos que f tiene un máximo relativo (en caso de mínimo es análogo) en A y es diferenciable.

Existe un entorno abierto de A tal que $f(A) \geq f(B)$, para todo punto B perteneciente a ese entorno abierto de A, supongamos que el radio del entorno es ε.

La función $g(x) = f(x, b)$ es una función de x que verifica $g(x) = f(x, b) \leq f(a, b) = g(a)$ para todo x perteneciente al intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Por tanto, la función de una variable $g(x)$ tiene en $x = a$ un máximo relativo.

Por otra parte, $g'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-g(a,b)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(A)$. Al ser f diferenciable existe $g'(a)$.

Por tanto $g'(a) = 0$. Esto es, $f_x(a, b) = 0$. ■

Observaciones 7.4 La condición anterior no es suficiente.

a) Puede ser que $\overrightarrow{\nabla f}(A) = \vec{0}$ y sea punto de silla.

b) Puede existir un extremo relativo en un punto A y no existir $\overrightarrow{\nabla f}(\mathrm{A})$ por no ser diferenciable la función f en el punto.

Ejemplo 7.5 *Encontrar los puntos críticos de la función* $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$

$f_x = -2x$, $f_y = -2y$, las derivadas parciales existen en todos los puntos de $\mathbb{R}^2$

$\vec{0} = \overrightarrow{\nabla f}(A) = (-2x, -2y) \Leftrightarrow x = 0$ e $y = 0$. El único punto crítico es (0,0).

$f(x,y) = 4 - x^2 - y^2 \leq 4 = f(0,0) \Rightarrow$ El punto (0,0) es un máximo relativo (también es máximo absoluto). ■

Ejemplo 7.6 *Encontrar los puntos críticos de la función* $f(x,y) = |x|+|y|$
La función no es diferenciable en (0,0), por tanto (0,0) es un punto crítico.
$f(0, 0) = 0 \leq |x|+|y| = f(x, y)$, por tanto tiene un mínimo relativo en (0,0) (también es mínimo absoluto). ■

Ejemplo 7.7 *Encontrar los puntos críticos de la función* $f(x,y) = x\,y$.
$f_x = y, f_y = x$, las derivadas parciales existen en todos los puntos de $\mathbb{R}^2$
$\vec{0} = \vec{\nabla f}(A) = (y, x) \Leftrightarrow x = 0$ e $y = 0$. El único punto crítico es (0,0).
$\forall(x,y)$ con $sig(x) = sig(y)$, $f(x,y) = x\,y > 0 = f(0,0)$
$\forall(x,y)$ con $sig(x) \neq sig(y)$, $f(x,y) = x\,y < 0 = f(0,0)$
Por tanto el punto (0,0) es un punto de silla. ■

Definición 7.8 (Matriz hessiana)
Sea f: $D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, *A un punto de D tal que f es diferenciable dos veces en el punto A, a la matriz de las derivadas segundas se le dice matriz hessiana.*

$$|H(A)| = \begin{vmatrix} f_{xx}(A) & f_{xy}(A) \\ f_{yx}(A) & f_{yy}(A) \end{vmatrix}$$

Teorema 7.9 (Clasificación de extremos mediante la matriz hessiana)
Sea f: $D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, *D un conjunto abierto, con derivadas segundas continuas en un entorno de A punto críticos de f. .Sea* $|H(A)|$ *el determinante de la matriz hessiana en el punto. Se verifica:*

a) Si $|H(A)| > 0$ y $f_{xx}(A) > 0$, *entonces f tiene un mínimo relativo en A.*
b) Si $|H(A)| > 0$ y $f_{xx}(A) < 0$, *entonces f tiene un máximo relativo en A.*
c) Si $|H(A)| < 0$, *entonces f tiene un punto de silla en A.*
d) Si $|H(A)| = 0$ *el criterio no nos lleva a ninguna conclusión.*

Ejemplo 7.10 *Encontrar y clasificar los puntos críticos de la función*

$$f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3.$$

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 3y = 0 \Leftrightarrow x^2 - y = 0 \Leftrightarrow x^2 = y \\ f_y = 3y^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow y^2 - x = 0 \Leftrightarrow y^2 = x \end{cases} \Rightarrow y = x^2 = (y^2)^2 = y^4 \Rightarrow 0 = y - y^4$$

$$= y(1 - y^3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y^3 - 1 = (y-1)(y^2 + y + 1) = 0 \quad \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

Si $y = 1$, $x = y^2 = 1$ (1, 1). Si $y = 0$, $x = y^2 = 1$ (0, 0). Puntos críticos (0, 0) y (1, 1)

$f_{xx} = 6x, f_{yy} = 6y, f_{xy} = f_{yx} = -3$

$$|H(0,0)| = \begin{vmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0 \Rightarrow (0,0) \text{ es punto de silla}$$

$$|H(1,1)| = \begin{vmatrix} f_{xx}(1,1) & f_{xy}(1,1) \\ f_{yx}(1,1) & f_{yy}(1,1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27 > 0 \Rightarrow (1,1) \text{ es mínimo relativo } ■$$

Ejemplo 7.11 *Encontrar y clasificar los puntos críticos de la función*

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2.$$

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 3y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ ó } x = -y \\ f_y = -6xy = 0 \Leftrightarrow xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ e } y = 0$$

Punto crítico (0, 0)

$f_{xx} = 6x$, $f_{yy} = -6x$, $f_{xy} = f_{yx} = -6y$

$|H(0,0)| = \begin{vmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, este criterio no nos permite deducir ninguna conclusión.

Si se consideran puntos de la forma $x = y$ se tiene $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 = x^3 - 3x^3 = -2x^3$.

Si $x = y$ con $x > 0$, se verifica $f(x,y) = -2x^3 < 0 = f(0,0)$

Si $x = y$ con $x < 0$, se verifica $f(x,y) = -2x^3 > 0 = f(0,0)$

Por tanto (0,0) es un punto de silla. ■

7.2 Extremos condicionales.

Definición 7.12 (Extremos condicionales) *Sea* f: $D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y L *una curva perteneciente a ese dominio. A los extremos de la función sobre la curva L se les denomina* ***extremos condicionales****:*

a) *Se dice que* $f(x, y)$ *tiene un* ***máximo condicional*** *en el punto* $A \in L$ *si* $f(A) \geq f(B)$ $\forall B$ *perteneciente a L y a un entorno abierto de A.*
b) *Se dice que* $f(x, y)$ *tiene un* ***mínimo condicional*** *en el punto A si* $f(A) \leq f(B)$ $\forall B$ *perteneciente a L y a un entorno abierto de A.*

Si la curva viene dada por una ecuación $\varphi(x, y) = 0$ *se dicen extremos de la función* $f(x,y)$ *con la condición* $\varphi(x, y) = 0$.

Ejemplo 7.13 *Sea la función* $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$.
$x^2 + y^2 \geq 0 \Rightarrow f(x, y) = 1 - x^2 - y^2 \leq 1 = f(0, 0)$. Por tanto tiene un máximo absoluto en (0,0).
Si se impone la condición $y = 1/2$, se tiene $f(x, 1/2) = 1 - x^2 - (1/2)^2 = ¾ - x^2$.
$f_x = -2x = 0 \Rightarrow x = 0$, $f_{xx}(0) = -2 < 0 \Rightarrow x = 0$ es un máximo.
Por tanto el punto (0, ½) es un máximo condicional de la función $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ con la condición $y = ½$. ■

Teorema 7.14 (Método de los multiplicadores de Lagrange) *Sean $f(x, y)$ y $\varphi(x, y)$ funciones con primeras derivadas parciales continuas, y un punto $A(a, b)$ verificando la condición $\varphi(x, y) = 0$. Si A es extremo condicional de la función $f(x, y)$ con la condición $\varphi(x, y) = 0$, entonces existe un λ tal que A es extremo de la función $F(x, y) = f(x, y) + \lambda\, \varphi(x, y)$.*

Demostración.

Sea A extremo condicional de la función $z = f(x, y)$ con la condición $\varphi(x, y) = 0$. Al existir la condición sólo una de las variables es independiente. Supongamos que tenemos y en función de x, $y = y(x)$, y sustituimos en $z = f(x, y)$, que da una función de x. El problema se reduce al estudio de extremos en la nueva función que depende de la variable x. Aplicando la regla de la cadena: $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$

Al ser A extremo de la nueva función $\frac{dz}{dx} = 0$.

Por tanto, $0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = f_x dx + f_y dx$. De $\varphi(x, y) = 0$ se obtiene $\varphi_x dx + \varphi_y dy = 0$.

Multiplicando esta última expresión por λ y sumando se tiene

$(f_x + \lambda\, \varphi_x)\, dx + (f_y + \lambda\, \varphi_y)\, dy = 0$

Se elige λ de modo que $f_y + \lambda\, \varphi_y = 0$, con lo cual $f_x + \lambda\, \varphi_x = 0$.

Por tanto existe un λ de modo que, A es extremo de la función $F(x,y) = f(x, y) + \lambda\, \varphi(x,y)$.

■

Este resultado proporciona un método para calcular los extremos condicionados:

Método 7.15 (Método de los multiplicadores de Lagrange)

Para determinar los posibles extremos condicionados se siguen los siguientes pasos:

1.-Se forma la función $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, \varphi(x, y)$

2.-Se igualan sus derivadas parciales a 0.

3.- Resuelve el sistema que forman

$$\begin{cases} F_x = & f_x + \lambda\varphi_x & = 0 \\ F_y = & f_y + \lambda\varphi_y & = 0 \\ F_\lambda = & \varphi(x, y) & = 0 \end{cases}$$

■

El método se puede extender a funciones de más de dos variables.

Ejemplo 7.16 *Hallar los extremos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ con la condición $x+y=1$.*

$F(x, y, \lambda) = (x^2 + y^2) + \lambda\,(x + y - 1)$

$F_x = 2x + \lambda = 0$

$F_y = 2y + \lambda = 0 \qquad \Rightarrow x = y$

$F_\lambda = x + y - 1 = 0 \qquad \Rightarrow 0 = -1 + x + x = -1 + 2x \Rightarrow x = ½ \Rightarrow y = ½ \Rightarrow A(½,½)$ ■

Teorema 7.17 (Teorema de Weiestrass) *Sea f: $S \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y S cerrado y acotado. Se verifica que f(x, y) tiene máximos y mínimos absolutos en el conjunto S.*

El teorema anterior proporciona un método para el cálculo de los extremos absolutos:

- Hallar los extremos relativos en el interior.
- Hallar los extremos en la frontera con el método de los multiplicadores de Lagrange.

Ejemplo 7.18 *Sea f: $S \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x, y) = x^2–xy+y^2$* y $S = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 2\}$, *S es un conjunto cerrado y acotado, determinar los extremos absolutos.*

1º.- Calcular los extremos relativos.

$\overrightarrow{\nabla f} = (2x - y, 2y - x) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 2x - y & = & 0 \\ 2y - x & = & 0 \end{cases}$, única solución $x = 0, y = 0$.

Puntos críticos (0,0)

Matriz hessiana $|H(0{,}0)| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$, $f_{xx}(0{,}0) = 2 > 0$, es un mínimo relativo.

2º.- Extremos condicionados en la frontera

$f(x, y) = x^2–xy+y^2$ con la condición $x^2 + y^2 – 2 = 0$

$F(x, y, \lambda) = x^2–xy+y^2 + \lambda(x^2 + y^2 – 2)$

$\begin{cases} F_x = & 2x - y + 2\lambda x & = 0 \\ F_y = & 2y - x + 2\lambda y & = 0 \\ F_\lambda = & x^2 + y^2 - 2 & = 0 \end{cases}$, el sistema tiene las siguientes soluciones:

$\lambda = -1/2, x = 1, y = 1$

$\lambda = -1/2, x = -1, y = -1$

$\lambda = -3/2, x = 1, y = -1$

$\lambda = -3/2, x = -1, y = 1$

3º.- Valores de la función en los puntos obtenidos

$f(0,0) = 0$, $f(1,1) = 1$, $f(-1,1) = 3$, $f(1,-1) = 3$, $f(-1,-1) = 1$

(0,0) es un mínimo absoluto

(-1,1) y (1,-1) son máximos absolutos. ■